
Curvas

Funções Vectoriais de Variável Real

Slide 1

Transparências de apoio à leccionação de aulas teóricas

Versão 2

©2000, 1998

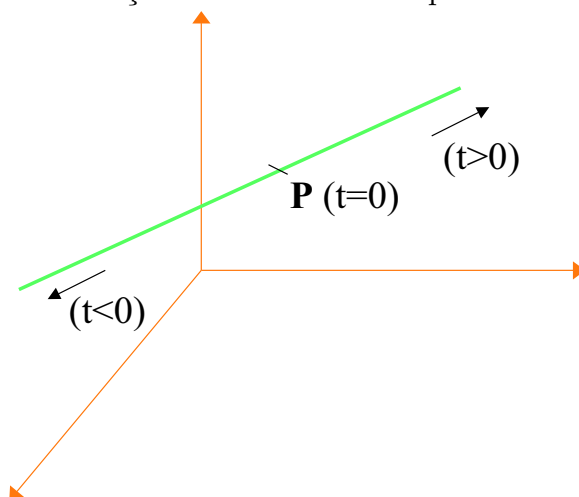
Maria Antónia Carravilla – FEUP

Curvas - Funções Vectoriais de Variável Real

Exemplo

A recta que passa no ponto P e que é paralela a um vector não nulo A é o conjunto de valores que toma a função vectorial X dada por.

$$X(t) = P + tA$$

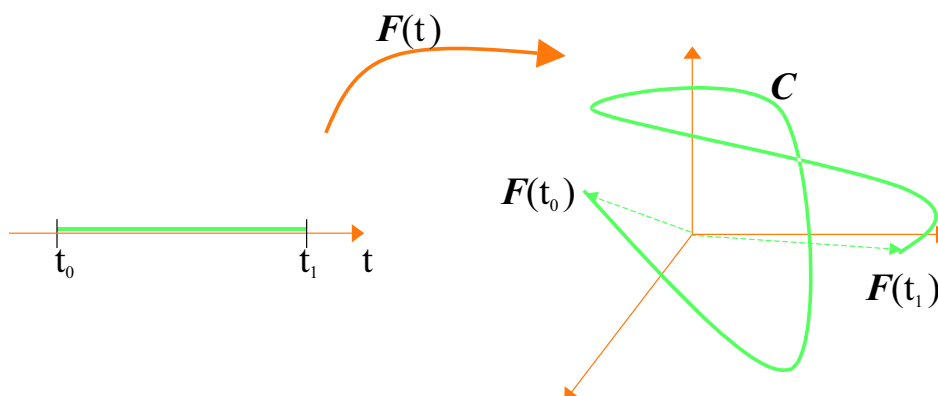


Slide 2

Curvas - Parametrização de uma curva \mathcal{C}

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathcal{I} &\rightarrow \mathbb{R}^n, \mathcal{I} = [t_0, t_1] \text{ intervalo de } \mathbb{R} \\ t &\rightsquigarrow \mathcal{F}(t) = (F_1(t), \dots, F_n(t)) \end{aligned}$$

Onde: \mathcal{F} é a parametrização de \mathcal{C} e t é o parâmetro



Slide 3

Curvas - Parametrização - Exercícios

Identificar a curva parametrizada por:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F} : [0, 2\pi] & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \rightsquigarrow & \mathcal{F}(t) = (a \cos(t), a \sin(t)) \end{array}$$

Slide 4 Identificar a curva parametrizada por:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{G} : [0, \pi] & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \rightsquigarrow & \mathcal{G}(t) = (a \cos(2t), a \sin(2t)) \end{array}$$

Curvas - Parametrização - Exercícios

Identificar a curva parametrizada por:

$$\begin{array}{rcl} x(t) & = & t + 1 \\ y(t) & = & 2t - 5 \end{array} \quad t \in \mathbb{R}$$

Slide 5 Identificar a curva parametrizada por:

$$\begin{array}{rcl} x(t) & = & 2t \\ y(t) & = & t^2 \end{array} \quad -1 \leq t \leq 1$$

Curvas - Parametrização - Exercícios

Parametrizar o gráfico da função $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$.

Parametrizar o segmento que une os pontos A e B .

Slide 6

Parametrizar o segmento que une os pontos $A = (-2, -1)$ e $B = (3, 2)$.

Curvas - Continuidade

$$\begin{aligned}\mathcal{F} : \mathcal{I} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ f_i : \mathcal{I} &\rightarrow \mathbb{R}\end{aligned} \quad \mathcal{F}(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$$

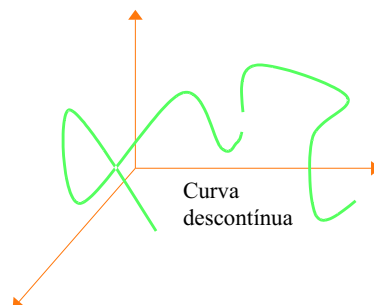
Curva contínua

\iff

\mathcal{F} contínua

\iff

cada uma das funções
componentes f_i contínua



Slide 7

Curvas - Derivabilidade

$$\begin{aligned}\mathcal{F} : \mathcal{I} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ f_i : \mathcal{I} &\rightarrow \mathbb{R}\end{aligned} \quad \mathcal{F}(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$$

$$\text{Existir } \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\mathcal{F}(t) - \mathcal{F}(t_0)}{t - t_0} \iff \forall_i, \text{ existe } \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f_i(t) - f_i(t_0)}{t - t_0}$$

Slide 8

\iff todas as componentes $f_i : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ são deriváveis em t_0

$$\mathcal{F}'(t_0) = (f'_1(t_0), f'_2(t_0), \dots, f'_n(t_0))$$

A curva $\mathcal{F} : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ diz-se derivável se existir $\mathcal{F}'(t) \forall t \in \mathcal{I}$

A curva $\mathcal{F} : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ diz-se derivável continuamente ou de classe C^1 se $\mathcal{F}' : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ for contínua.

Curvas - Regras de Cálculo

$$\mathcal{F} : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Sejam $\mathcal{G} : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ deriváveis

$$f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$$

Slide 9

$$\begin{aligned}(\mathcal{F} + \mathcal{G})(t) &= \mathcal{F}(t) + \mathcal{G}(t) \\ \text{então } (f\mathcal{F})(t) &= f(t)\mathcal{F}(t) \quad \text{são deriváveis, e} \\ (\mathcal{F} \cdot \mathcal{G})(t) &= \mathcal{F}(t) \cdot \mathcal{G}(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mathcal{F} + \mathcal{G})'(t) &= \mathcal{F}'(t) + \mathcal{G}'(t) \\ (f\mathcal{F})'(t) &= f'(t)\mathcal{F}(t) + f(t)\mathcal{F}'(t) \\ (\mathcal{F} \cdot \mathcal{G})'(t) &= \mathcal{F}'(t) \cdot \mathcal{G}(t) + \mathcal{F}(t) \cdot \mathcal{G}'(t)\end{aligned}$$

Curvas - Exercício

Seja $\mathcal{F} : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ derivável tal que $\|\mathcal{F}(t)\| \neq 0$.

Mostrar que a função:

$$\begin{aligned} f : \mathcal{I} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\leadsto f(t) = \|\mathcal{F}(t)\| \end{aligned}$$

Slide 10

é derivável e que:

$$\frac{d \|\mathcal{F}(t)\|}{dt} = \frac{\mathcal{F}(t) \cdot \mathcal{F}'(t)}{\|\mathcal{F}(t)\|}$$

Curvas - Reparametrização

Os mais importantes conceitos geométricos relacionados com uma curva são os que se mantêm invariantes quando há uma alteração de parâmetro (reparametrização).

Duas funções dizem-se equivalentes se se relacionam da seguinte forma:

$$\mathcal{G}(u) = \mathcal{F}(f(u))$$

Slide 11

e correspondem a representações paramétricas diferentes da mesma curva. A função $f(u)$ corresponde à alteração de parametrização.

Curvas - Reparametrização

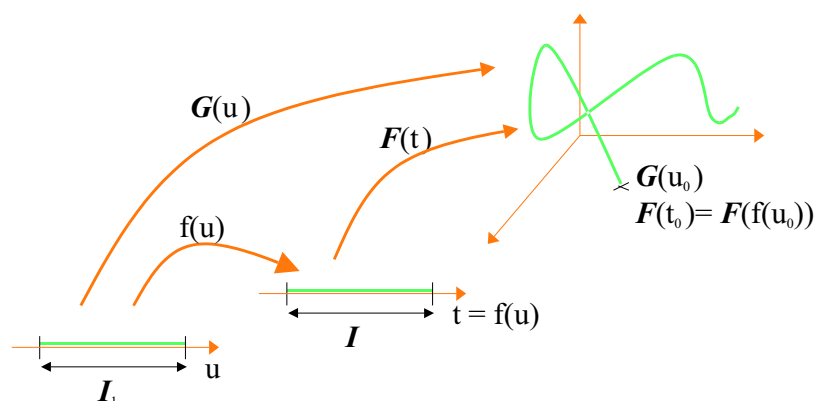
Seja $\mathcal{F} : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ derivável.
 $f : \mathcal{I}_1 \rightarrow \mathcal{I}$

Considere-se $\mathcal{G} : \mathcal{I}_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ $\mathcal{G} = \mathcal{F} \circ f$.

\mathcal{G} designa-se por reparametrização da curva \mathcal{F} .

\mathcal{G} é derivável e $\mathcal{G}'(u) = \mathcal{F}'(f(u))f'(u)$

Slide 12



Curvas - Reparametrização - Exercício

Considere

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(t) &= (a \cos t, a \sin t) & 0 \leq t \leq 2\pi \\ f(u) &= 2u & 0 \leq u \leq \pi\end{aligned}$$

Slide 13

$$\mathcal{G} = \mathcal{F} \circ f$$

Determine $\mathcal{G}(u)$ e $\mathcal{G}'(u)$

Curvas - Velocidade, Velocidade Escalar e Aceleração

Uma partícula move-se num espaço a 2 ou 3 dimensões de tal forma que a sua posição no instante t relativamente a um determinado sistema de coordenadas é dada por $F(t)$.

Quando t varia ao longo de um intervalo de tempo, o percurso da partícula é a imagem de F .

Slide 14 Assim a função vectorial F é um modelo matemático natural para descrever movimento.

Chama-se a F a função posição do movimento.

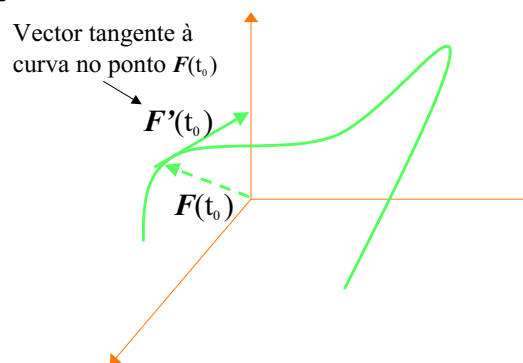
Conceitos físicos tais como velocidade, velocidade escalar e aceleração podem ser definidos como derivadas da função posição.

Curvas - Velocidade, Velocidade Escalar e Aceleração

Seja $\mathcal{F} : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva contínua e $t \in \mathcal{I}$

Vector velocidade da curva \mathcal{F} no instante t_0 :

Slide 15
$$\mathcal{F}'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\mathcal{F}(t) - \mathcal{F}(t_0)}{t - t_0} \in \mathbb{R}^n$$



Velocidade escalar da curva \mathcal{F} no instante t_0 : $\|\mathcal{F}'(t_0)\| = v(t_0) \in \mathbb{R}$

Vector aceleração da curva \mathcal{F} no instante t_0 : $\mathcal{F}''(t_0) \in \mathbb{R}^n$

Curvas - Velocidade, Velocidade Escalar e Aceleração - Exercícios

Determinar a velocidade, a velocidade escalar e a aceleração da curva no instante $t = 0$:

$$\begin{array}{lll} \mathcal{F} : & [0, 2\pi] & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t & \rightsquigarrow & \mathcal{F}(t) = (a \cos(t), a \sin(t)) \end{array}$$

Slide 16

Determinar a velocidade, a velocidade escalar e a aceleração da curva no instante $t = 0$:

$$\begin{array}{lll} \mathcal{G} : & [0, \pi] & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t & \rightsquigarrow & \mathcal{G}(t) = (a \cos(2t), a \sin(2t)) \end{array}$$

Movimento linear

Considere-se um movimento que tem o vector posição:

$$\mathcal{G}(t) = P + f(t)A$$

onde A e P são vectores fixos e $A \neq 0$. Trata-se do movimento ao longo de uma recta que passa por P com direcção A . Neste caso a velocidade, a velocidade escalar e a aceleração são dadas por:

Slide 17

$$\mathcal{G}'(t) = f'(t)A$$

$$v(t) = \| \mathcal{G}'(t) \| = |f'(t)| \| A \|$$

$$\mathcal{G}''(t) = f''(t)A$$

se $f'(t)$ e $f''(t) \neq 0$ então o vector aceleração é paralelo ao vector velocidade.

Movimento circular

Considere-se um movimento que tem o vector posição:

$$\mathcal{G}(t) = a \cos(\omega t)(i) + a \sin(\omega t)(j)$$

onde a tem um valor fixo. Trata-se do movimento ao longo de um círculo de raio a , centrado na origem. Neste caso a velocidade, a velocidade escalar e a aceleração são dadas por:

Slide 18

$$\mathcal{G}'(t) = -a\omega \sin(\omega t)(i) + a\omega \cos(\omega t)(j)$$

$$v(t) = a\omega$$

$$\mathcal{G}''(t) = -a\omega^2 \cos(\omega t)(i) - a\omega^2 \sin(\omega t)(j) = -\omega^2 \mathcal{G}(t)$$

O vector aceleração tem sempre uma direcção oposta à do vector posição e perpendicular à velocidade.

Curvas - vector aceleração

No movimento linear, o vector aceleração é paralelo ao vector velocidade, no movimento circular, o vector aceleração é perpendicular à velocidade.

Para um movimento genérico, o vector aceleração é a soma de dois vectores perpendiculares, um paralelo e outro perpendicular à velocidade.

Slide 19

Curvas - Vector Tangente Unitário

Considere-se $\mathcal{F} : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^2

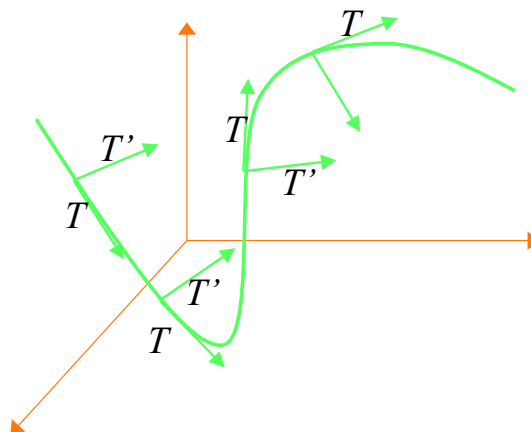
Para os valores de t para os quais $\|\mathcal{F}'(t)\| \neq 0$

Slide 20

Vector tangente unitário:

$$\mathcal{T}(t) = \frac{\mathcal{F}'(t)}{\|\mathcal{F}'(t)\|} \quad (\|\mathcal{T}(t)\| = 1)$$

$$\mathcal{T}'(t) \cdot \mathcal{T}(t) = 0 \quad \forall_t$$



Curvas - Vector Normal Principal

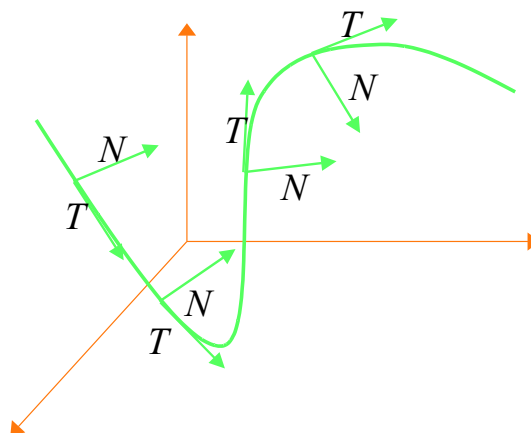
Considere-se $\mathcal{F} : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^2

Para os valores de t para os quais $\|\mathcal{F}'(t)\| \neq 0$ e $\|\mathcal{T}'(t)\| \neq 0$

Slide 21

Vector normal principal: :

$$\mathcal{N}(t) = \frac{\mathcal{T}'(t)}{\|\mathcal{T}'(t)\|} \quad \|\mathcal{N}(t)\| = 1$$



Curvas - Plano Osculador

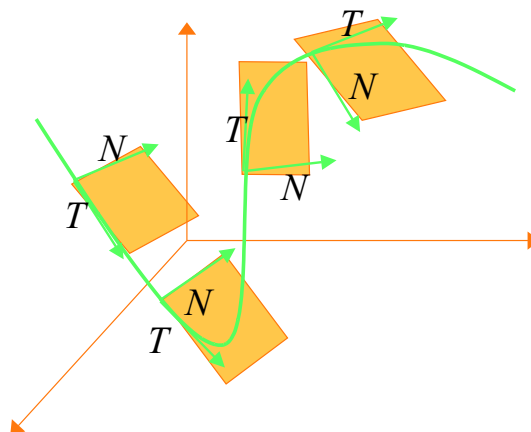
Considere-se $\mathcal{F} : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^2

Para os valores de t para os quais $\|\mathcal{F}'(t)\| \neq 0$ e $\|\mathcal{T}'(t)\| \neq 0$

Slide 22

Plano osculador: Plano determinado pelos vectores

$\mathcal{T}(t)$ e $\mathcal{N}(t)$



Curvas - vector aceleração

Para um movimento genérico, o vector aceleração é a soma de dois vectores perpendiculares, um paralelo e outro perpendicular à velocidade.

$$\mathcal{F}''(t) = v'(t)\mathcal{T}(t) + v(t)\mathcal{T}'(t)$$

e se $\mathcal{T}'(t) \neq \mathcal{O}$

Slide 23

$$\mathcal{F}''(t) = \|\mathcal{F}'(t)\|' \mathcal{T}(t) + \|\mathcal{F}'(t)\| \|\mathcal{T}'(t)\| \mathcal{N}(t)$$

O vector aceleração está sempre sobre o plano oscular.

$\mathcal{T}(t)$, vector tangente unitário – componente tangencial da aceleração (uma alteração na velocidade escalar implica uma alteração de $\|\mathcal{F}'(t)\|' \mathcal{T}(t)$);

$\mathcal{N}(t)$, vector normal principal – componente normal da aceleração (uma alteração na direcção do movimento implica uma alteração de $\|\mathcal{F}'(t)\| \|\mathcal{T}'(t)\| \mathcal{N}(t)$).

Curvas - Inversão do sentido do percurso

Exemplo: $\mathcal{F}(t) = (a \cos t, a \sin t) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

$\mathcal{G}(t) = (a \cos(2\pi - t), a \sin(2\pi - t)) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

Genericamente:

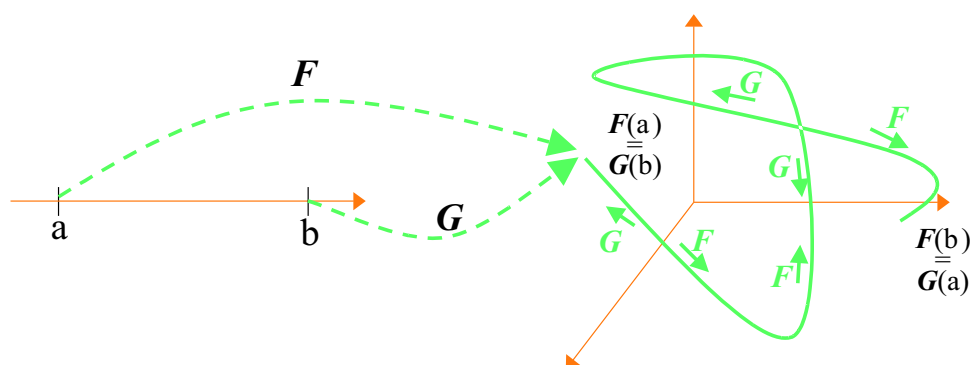
$$\mathcal{F} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$t \rightsquigarrow \mathcal{F}(t)$$

$$\mathcal{G} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

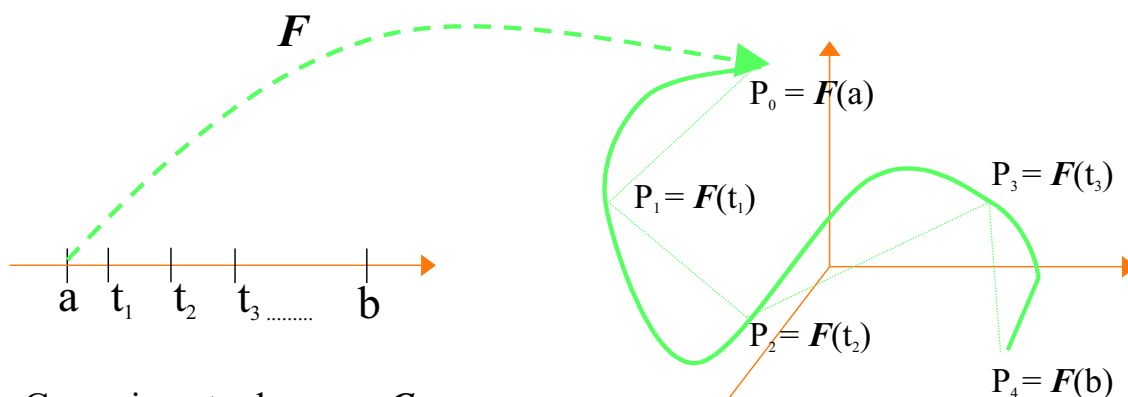
$$t \rightsquigarrow \mathcal{G}(t) = \mathcal{F}(a + b - t)$$

Slide 24



Curvas - Comprimento de Arco

Slide 25



Comprimento da curva C :

Supremo dos comprimentos de todas as
linhas poligonais inscritas em C

Curvas - Comprimento de Arco

Seja $\mathcal{F} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1

O comprimento total da curva percorrida entre $t = a$ e $t = b$ é:

$$L = \int_a^b v(t) dt = \int_a^b \| \mathcal{F}'(t) \| dt$$

Slide 26

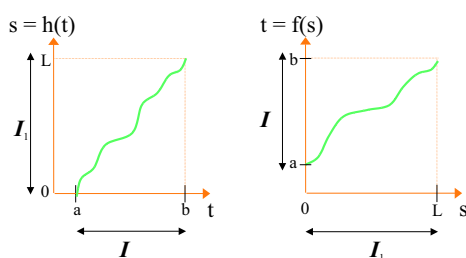
Curvas - Parametrização pelo Comprimento de Arco

Comprimento da curva percorrida entre a e t : $s = h(t) = \int_a^t v(u) du$

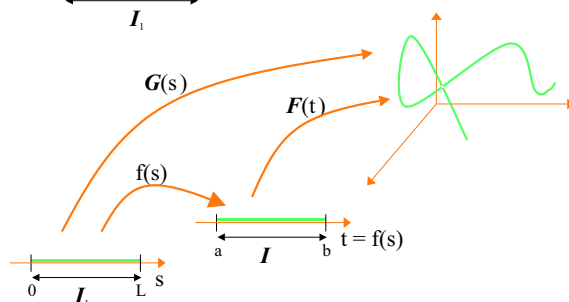
Como $v(t)$ é contínua, $h'(t) = v(t)$ (velocidade escalar: distância percorrida por unidade de tempo)

Como $v(t) = \| \mathcal{F}'(t) \| > 0 \Rightarrow s' = h'(t) = v(t) > 0 \Rightarrow s = h(t)$ é estritamente crescente.

Slide 27



$\mathcal{G}(s) = \mathcal{F} \circ f(s)$ é a parametrização da curva pelo comprimento de arco



Curvas - Curvatura

A curvatura de uma curva \mathcal{K} é a medida da variação de \mathcal{T} por unidade de comprimento de arco ds .

$$\mathcal{K} = \left\| \frac{d\mathcal{T}}{ds} \right\| = \left\| \frac{d\mathcal{T}}{dt} \frac{dt}{ds} \right\| = \left\| \frac{d\mathcal{T}}{dt} \right\| \frac{1}{s'(t)} = \left\| \frac{d\mathcal{T}}{dt} \right\| \frac{1}{v(t)}$$

Slide 28 O raio de curvatura é o inverso da curvatura:

$$\rho = \frac{1}{\mathcal{K}}$$

Curvas - Aceleração

Seja $\mathcal{F} : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$

Seja $\|\mathcal{F}'(t)\| \neq 0$

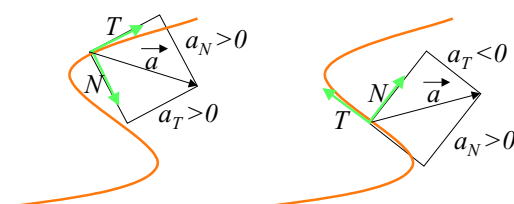
e $\mathcal{F}'(t)$ derivável

Vector velocidade = $\mathcal{F}'(t)$

Vector aceleração = $\mathcal{F}''(t) = a_T \mathcal{T}(t) + a_N \mathcal{N}(t)$

aceleração tangencial = $a_T = v'(t)$

aceleração centrípeta ou normal = $a_N = \frac{v^2(t)}{\rho}$



Slide 29

Curvas - Aceleração - Exercício

Considere a curva $C : 2y = x^2, x \geq 0$.

Obtenha uma parametrização para a curva e calcule as componentes tangencial e normal da aceleração no instante $t = 1$.

Slide 30